Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo Científico
y Estadística

Nombre: ________________
Carné: ________________

Introducción a las probabilidades (CO3121)
Septiembre-Diciembre 2014
E2: 36 %

Conteste cada pregunta en el espacio destinado para ello, las violaciones serán penalizadas. Recuerde que el examen es individual. No se permite el uso de calculadora.

1.

Una urna contiene diez canicas, de las cuales cinco son verdes, dos azules y tres rojas. Se van a extraer tres canicas de la urna, una por una sin reemplazo. ¿Qué probabilidad hay de que las tres que se saquen sean verdes? **6 Puntos**

Sea Y = # canicas verdes que salen, N = # canicas, r = # canicas verdes en la urnas, n = # canicas que se sacan

$N=10,\ r=5,\ n=3 \Rightarrow Y \sim \text{Hipergeo}(10,5,3)$ 2

$$P(Y=3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{5!}{\cancel{3!}2!}\cdot\frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!}0!}}{\frac{10!}{7!\,\cancel{3!}}} = \frac{5!\,7!}{10!\,2!} = \frac{5.4.3.\cancel{2!}\,\cancel{7!}}{10.9.8\,\cancel{7!}\,\cancel{2!}} = \frac{2.}{3.8} = \frac{1}{12}$$

2 2

2.

Un técnico planea probar cierto tipo de resina desarrollada en el laboratorio para determinar la naturaleza del tiempo que transcurre antes de que se realice la unión. Se sabe que el tiempo medio para la unión es 3 horas y la desviación estándar es 0.5 horas. Un producto se considerará indeseable si el tiempo de unión es menos de 1 hora o más de 4 horas. Comente sobre la utilidad de la resina. ¿Con qué frecuencia su desempeño se considera indeseable? Suponga que el tiempo para la unión se distribuye normalmente.

8 Puntos

Y= tiempo de unión, $Y \sim N(3, 0.5^2) \leftarrow 1$

Deseable si $1 \le Y \le 4$, indeseable si $Y \le 1$ ó $Y \ge 4$

$$P(Y \le 1 \text{ ó } Y \ge 4) \overset{1}{=} 1 - P(1 \le Y \le 4) = 1 - P\overbrace{\left(\frac{1-3}{1/2} \le \frac{Y-\mu}{\sigma} \le \frac{4-3}{1/2}\right)}^{2} = 1 - P(-2 \le Z \le 4)$$

$$\underset{1}{=} 1 - [P(Z \le 4) - P(Z \le -2)] = 1 - \underset{\underset{1}{\approx 1}}{P(Z \le 4)} + [P(Z \le 2)] \simeq 1 - 1 + 0.9772 \doteq \underset{2}{0.9772}$$

3.

Suponga que se realiza una sucesión de lanzamientos independientes con una moneda para la cual la probabilidad de obtener una cara en cualquiera de los lanzamientos es 1/30.

a) ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos que se necesitarán para obtener cinco caras?

b) ¿Cuál es el número esperado de sellos que se obtendrán antes de que se hayan obtenido cinco caras?

8 Puntos

a) $p = P(\text{cara}) = \frac{1}{30}$ $\quad q = P(\text{sello}) = \frac{29}{30}$ 1

Y = # de lanzamientos para obtener 5 caras $\Rightarrow Y \sim BinNeg(5, 1/30)$. 2

$$E[Y] = \frac{5}{\frac{1}{30}} = \underline{150} \quad 1$$

b) X = # sellos $\Rightarrow X = Y - 5$ 2

$$E[X] = E[Y-5] = E[Y] - E[5] = 150 - 5 = \underline{145} \quad 2$$

4.

La distribución exponencial se aplica con frecuencia a los tiempos de espera entre éxitos en un proceso de Poisson. Si el número de llamadas que se reciben por hora en un servicio de contestadora telefónica es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 6$, sabemos que el tiempo, en horas, entre llamadas sucesivas tiene una distribución exponencial con parámetro $\beta = 1/6$. ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 15 minutos entre cualesquiera dos llamadas sucesivas? **5 Puntos**

Y = tiempo entre llamadas $\Rightarrow Y \sim \text{Exp}(1/6)$

1

15 minutos es 1/4 de hora $\Rightarrow P(Y \geq 1/4) = ?$ 1

$$P(Y \geq 1/4) = \int_{1/4}^{+\infty} 6e^{-6x}\,dx = -e^{-6x}\Big|_{1/4}^{+\infty} = -0 + e^{-6/4} = e^{-3/2}$$

1 2

a) La distribución beta tiene amplia aplicación en problemas de confiabilidad, donde la variable aleatoria fundamental es una proporción. Considere que las impurezas en el lote del producto de un proceso químico reflejan un problema grave. Se sabe que la proporción de impurezas Y en un lote tiene la función de densidad beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 10$. Si un lote con más de 60 % de impurezas es rechazado, ¿cuál es la probabilidad de que un lote se considere no aceptable? **5 Puntos**

b) Si se revisan diez lotes de forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro de ellos sean rechazados? **4 Puntos**

(a) $Y \sim \text{beta}(1,10)$ $\quad \dfrac{\Gamma(11)}{\Gamma(1)\Gamma(10)} = \dfrac{10!}{0!\,9!} = 10 \Rightarrow f(y) = \begin{cases} 10(1-y)^9 & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ 1

1 $P(Y>0.6) = \displaystyle\int_{0.6}^{1} 10(1-y)^9\,dy =$ 1 $\displaystyle - \int_{0.4}^{0} 10v^9\,dv = \int_{0}^{0.4} 10v^9\,dv = v^{10}\Big|_{0}^{0.4} = (0.4)^{10}$ 2

$v = 1-y$

$dv = -dy$

(b) $n = 10,\ p = (0.4)^{10}$. $X = \#$ rechazados $\Rightarrow X \sim \text{Bin}(10, (0.4)^{10})$ 2

$P(X=4) = \binom{10}{4}\left[(0.4)^{10}\right]^4\left[1-(0.4)^{10}\right]^6.$

2